（八）

第三章 若干数学典故中的数学文化

第一节　历史上的三次数学危机

历史上，数学的发展有顺利也有曲折。大的挫折也可以叫做危机，危机也意味着挑战，危机的解决就意味着进步。所以，危机往往是数学发展的先导。数学发展史上有三次数学危机。每一次数学危机，都是数学的基本部分受到质疑。实际上，也恰恰是这三次危机，引发了数学上的三次思想解放，大大推动了数学科学的发展。

一、第一次数学危机

第一次数学危机是由$\sqrt{2}$不能写成两个整数之比引发的，我们在第一章已专门讨论过，现再简要回顾一下。

这一危机发生在公元前5世纪，危机来源于：当时认为所有的数都能表示为整数比，但突然发现$\sqrt{2}$不能表为整数比。其实质是：$\sqrt{2}$是无理数，全体整数之比构成的是有理数系，有理数系需要扩充，要添加无理数。

当时古希腊的欧多克索斯部分地解决了这一危机。他采用了一个

十分巧妙的关于“两个量之比”的新说法，回避了$\sqrt{2}$是无理数的实质，用几何的方法去处理不可公度比。这样做的结果，使几何的基础牢靠了，几何从全部数学中脱颖而出。欧几里得的《几何原本》中也采用了这一说法，以致在以后的近二千年中，几何变成了几乎是全部严密数学的基础。

但是彻底解决这一危机是在19世纪，依赖实数理论的建立。

二、第二次数学危机

第二次数学危机发生在牛顿创立微积分的十七世纪。第一次数学危机是由毕达哥拉斯学派内部提出的，第二次数学危机则是由牛顿学派的外部、贝克莱大主教提出的，是对牛顿“无穷小量”说法的质疑引起的。

1．危机的引发

1）牛顿的“无穷小”

牛顿的微积分是一项划时代的科学成就，蕴含着巨大的智慧和创新，但也有逻辑上的问题。我们来看一个例子。

微积分的一个来源，是想求运动物体在某一时刻t_0的瞬时速度。在牛顿之前，只能求一段时间内的平均速度，无法求某一时刻的瞬时速度。

牛顿的思路是：让时间从t_0变到t_1，这段时间记作$\Delta t = t_1 - t_0$，而这段时间里物体走过的距离记作ΔS。比值$\frac{\Delta S}{\Delta t}$便是$t_0$到$t_1$这段时间内物体的平均速度。牛顿设想：$\Delta t$越小，这个平均速度应当越接近物体在时刻$t_0$的瞬时速度。当$\Delta t$越来越小（当然$\Delta S$也越来越小），最后成为无穷小，将要变成 0 而还不是 0 的时候，两个无穷小之比$\frac{\Delta S}{\Delta t}$，就是所要求的瞬时速度。

例如，设自由落体在时间 t 下落的距离为$S(t)$，有公式$S(t) = \frac{1}{2}gt^2$，其中 g 是固定的重力加速度。我们要求物体在t_0的瞬时速度，先求$\frac{\Delta S}{\Delta t}$。

$$\Delta S = S(t_1) - S(t_0) = \frac{1}{2}gt_1^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{1}{2}g[(t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2] = \frac{1}{2}g[2t_0\Delta t + (\Delta t)^2]$$

$\therefore \quad \frac{\Delta S}{\Delta t} = gt_0 + = \frac{1}{2}g(\Delta t)$ [大庆：删去左边的第二个等号] (*)

当Δt变成无穷小时，右端的$\frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)$也变成无穷小，因而上式右端就可以认为是$gt_0$，这就是物体在$t_0$时的瞬时速度，它是两个无穷小之比。

牛顿的这一方法很好用，解决了大量过去无法解决的科技问题。但是逻辑上不严格，遭到指责。

2）贝克莱的发难

英国的贝克莱大主教发表文章猛烈攻击牛顿的理论。

贝克莱问道："无穷小"作为一个量，究竟是不是 0？

① 如果是 0，(*) 式左端当 Δt 和 ΔS 变成无穷小后分母为 0，就没有意义了。

如果不是 0，(*) 式右端的 $\frac{1}{2}g(\Delta t)$ 就不能任意去掉。

② 在推出 (*) 式时，假定了 $\Delta t \neq 0$ 才能做除法，所以 (*) 式的成立是以 $\Delta t \neq 0$ 为前提的。那么，为什么又可以让 $\Delta t = 0$ 而求得瞬时速度呢？

③ 因此，牛顿的这一套运算方法，就如同从 $5 \times 0 = 3 \times 0$ 出发，两端同除以 0，得出 5=3 一样的荒谬。

贝克莱还讽刺挖苦说：即然 ΔS 和 Δt 都变成"无穷小"了，而无穷小作为一个量，既不是 0，又不是非 0，那它一定是"量的鬼魂"了。

这就是著名的"贝克莱悖论"。

对牛顿微积分的这一责难并不是由数学家提出的，但是，牛顿及他以后一百年间的数学家，都不能有力地还击贝克莱的这种攻击。

3）实践是检验真理的唯一标准

应当承认，贝克莱的责难是击中要害的。“无穷小”的方法在概念上和逻辑上都缺乏基础。牛顿和当时的其它数学家并不能在逻辑上严格说清“无穷小”的方法。数学家们相信它，只是由于它使用起来方便有效，并且得出的结果总是对的。特别是像海王星的发现，那样鼓舞人心的例子，显示出牛顿的理论和方法的巨大威力。所以，人们不大相信贝克莱的指责。这表明，在大多数人的脑海里，“实践是检验真理的唯一标准。”

2．危机的实质

第一次数学危机的实质是“$\sqrt{2}$不是有理数，而是无理数”。那么第二次数学危机的实质是什么？应该说，是极限的概念不清楚，极限的理论基础不牢固。也就是说，微积分理论缺乏逻辑基础。

其实，在牛顿把瞬时速度说成“物体所走的无穷小距离与所用的无穷小时间之比”的时候，这种说法本身就是不明确的，是含糊的。

当然，牛顿也曾在他的著作中说明，所谓“最终的比”，就是分子、分母要成为 0 还不是 0 时的比——例如（*）式中的 gt，它不是

“ 最终的量的比 ”，而是 “ 比所趋近的极限 ”。

他这里虽然提出和使用了 “ 极限 ” 这个词，但并没有明确说清这个词的意思。

德国的莱布尼茨虽然也同时发明了微积分，但是也没有明确给出极限的定义。

正因为如此，此后一百年间的数学家，都不能满意地解释贝克莱提出的悖论。

所以，由 “ 无穷小 ” 引发的第二次数学危机，实质上是缺少严密的极限概念和极限理论作为微积分学的基础。

3．危机的解决

1）必要性

微积分虽然在发展，但微积分逻辑基础上存在的问题是那样明显，这毕竟是数学家的一块心病。

而且，随着时间的推移，研究范围的扩大，类似的悖论日益增多。数学家在研究无穷级数的时候，做出许多错误的证明，并由此得到许多错误的结论。由于没有严格的极限理论作为基础。数学家们在有限

与无限之间任意通行（不考虑无穷级数收敛的问题）。

因此，进入 19 世纪时，一方面微积分取得的成就超出人们的预料，另一方面，大量的数学结构没有正确的牢固的逻辑基础，因此不能保证数学结论是正确无误的。

历史要求为微积分学说奠基。

2）严格的极限理论的建立

到 19 世纪，一批杰出数学家辛勤、天才的工作，终于逐步建立了严格的极限理论，并把它作为微积分的基础。

应该指出，严格的极限理论的建立是逐步的、漫长的。

① 在 18 世纪时，人们已经建立了极限理论，但那是初步的、粗糙的。

② 达朗贝尔在 1754 年指出，必须用可靠的理论去代替当时使用的粗糙的极限理论。但他本人未能提供这样的理论。

③ 19 世纪初，捷克数学家波尔查诺开始将严格的论证引入数学分析，他写的《无穷的悖论》一书中包含许多真知灼见。

④ 而做出决定性工作、可称为分析学的奠基人的是法国数学家

柯西（A.L.Canchy,1789—1857）。他在 1821—1823 年间出版的《分析教程》和《无穷小计算讲义》是数学史上划时代的著作。他对极限给出比较精确的定义，然后用它定义连续、导数、微分、定积分和无穷级数的收敛性，已与我们现在课本上的差不太多了。

3）严格的实数理论的建立

① 对以往理论的再认识

后来的一些发现，使人们认识到，极限理论的进一步严格化，需要实数理论的严格化。微积分或者说数学分析，是在实数范围内研究的。但是，下边两件事，表明极限概念、连续性、可微性和收敛性对实数系的依赖比人们想象的要深奥得多。

一件事是，1874 年德国数学家魏尔斯特拉斯（K.T.W.Weirstrass，1815—1897）构造了一个“ 点点连续而点点不可导的函数 ”。连续函数在直观上是函数曲线没有间断，连在一起，而函数在一点可导直观上是函数曲线在该点有切线。所以在直观上连续与可导有密切的联系。这之前甚至有人还证明过：函数在连续点上都可导（当然是错误的）。根本不可想象还会有“ 点点连续而点点不可导的函数 ”。

魏尔斯特拉斯的例子是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

其中 a 是奇数，$b \in (0,1)$，使 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$。

另一件事是德国数学家黎曼（B.Riemann，1826—1866）发现，柯西把定积分限制于连续函数是没有必要的。黎曼证明了，被积函数不连续，其定积分也可能存在。

黎曼还造出一个函数，当自变量取无理数时它是连续的，当自变量取有理数时它是不连续的。

这些例子使数学家们越来越明白，在为分析建立一个完善的基础方面，还需要再深挖一步：即需要理解实数系的更深刻的性质。

② 魏尔斯特拉斯的贡献

德国数学家魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815—1897）的努力，终于使分析学从完全依靠运动学、直观理解和几何概念中解放出来。他的成功产生了深远的影响，主要表现在两方面，一方面是建立了实数系，另一方面是创造了精确的“$\varepsilon-\delta$”语言。

“$\varepsilon-\delta$”语言的成功，表现在：

这一语言给出极限的准确描述，消除了历史上各种模糊的用语，

诸如“最终比”、“无限地趋近于”，等等。

这样一来，分析中的所有基本概念都可以通过实数和它们的基本运算和关系精确地表述出来。

总之，第二次数学危机的核心是微积分的基础不稳固。柯西的贡献在于，将微积分建立在极限论的基础。魏尔斯特拉斯的贡献在于，逻辑地构造了实数系，建立了严格的实数理论，使之成为极限理论的基础，所以建立数学分析（或者说微积分）基础的“逻辑顺序”是：实数理论—极限理论—微积分。而“历史顺序”则正好相反。

实数理论是学习数学分析的难点，诸如区间套定理，有限复盖定理等，在数学学院，通常也只有数学专业才比较彻底地讲授。

4）极限的“$\varepsilon-\delta$”定义及“贝克莱悖论”的消除

① 极限的“$\varepsilon-\delta$”定义

定义：设函数$f(x)$在x_1的附近都有定义，如果有一个确定的实数a，$\forall\varepsilon>0$（无论多么小的正数ε）。

都$\exists\varepsilon>0$（都能找到一个正数δ，依赖于ε），使当$0<|x-x_1|<\delta$时（满足不等式$|x-x_1|<\delta$的所有不等于x_1的x,）有$|f(x)-a|<\varepsilon$（这些x对应的函数值$f(x)$与a的差小于预先给定的任意小的ε）我们就说函数$f(x)$在x趋近于x_1时，有极限a。

记为$\lim\limits_{x\to x_1} f(x)=a$。

由极限的这个“$\varepsilon-\delta$”定义，可以求出一些基本的极限，并严格地建立一整套丰富的极限理论。简单说，例如有

两个相等的函数，取极限后仍相等；

两个函数，和的极限等于极限的和。等等。

②“贝克莱悖论”的消除

回到牛顿的（*）式上：$\frac{\Delta S}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g(\Delta t)(\Delta t\neq 0)$。

这是在$\Delta t\neq 0$（即$t_1\neq t_0$）条件下，得到的等式；它表明Δt时间内物体的平均速度为$gt_0+\frac{1}{2}g(\Delta t)$。（*）式等号两边都是$\Delta t$的函数。然后，我们把物体在$t_0$时刻的瞬时速度定义为：上述平均速度当$\Delta t$趋于0时的极限，即

$$\text{物体在}t_0\text{时刻的瞬时速度}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}。$$

下边我们对（*）式的等号两边同时取极限$\Delta t \to 0$，根据“两个相等的函数取极限后仍相等”，得

$$瞬时速度=\lim_{\Delta t \to 0}(gt_0+\frac{1}{2}g(\Delta t))$$

再根据“两个函数和的极限等于极限的和”，得

$$\lim_{\Delta t \to 0}(gt_0+\frac{1}{2}g(\Delta t))=\lim_{\Delta t \to 0}gt_0+\lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{2}g(\Delta t)$$

然后再求极限得

$$=gt_0+0=gt_0$$

上述过程所得结论与牛顿原先的结论是一样的，但每一步都有了严格的逻辑基础。“贝克莱悖论”的焦点“无穷小量Δt是不是 0？”，在这里给出了明确的回答：$\Delta t \neq 0$。

这里也没有“最终比”或“无限趋近于”那样含糊不清的说法。

三、第三次数学危机

1.“数学基础”的曙光——集合论

到 19 世纪，数学从各方面走向成熟。非欧几何的出现使几何理论更加扩展和完善；实数理论（和极限理论）的出现使微积分有了牢靠的基础；群的理论、算术公理的出现使算术、代数的逻辑基础更为明晰，等等。人们水到渠成地思索：整个数学的基础在哪里？正在这时，19 世纪末，集合论出现了。人们感觉到，集合论有可能成为整个数学的基础。

其理由是：算术以整数、分数等为对象，微积分以变数、函数为对象，几何以点、线、面及其组成的图形为对象。同时，用集合论的语言，算术的对象可说成是“以整数、分数等组成的集合”；微积分的对象可说成是“以函数等组成的集合”；几何的对象可说成是“以点、线、面等组成的集合”。这样一来，都是以集合为对象了。集合成了更基本的概念。

于是，集合论似乎给数学家带来了曙光：可能会一劳永逸地摆脱“数学基础”的危机。尽管集合论自身的相容性尚未证明，但许多人认为这只是时间问题。庞加莱甚至在 1900 年巴黎国际数学家大会上宣称：“现在我们可以说，完全的严格性已经达到了！”

2．算术的集合论基础

1）人们按下列逻辑顺序把全部数学的基础归结为算术，即归结为非负整数，即自然数集合加上 0——现在有些数学家就把这一集合称为自然数集合。

（算术）非负整数 n→有理数 $\pm\frac{n}{m}\xrightarrow{\text{取极限}}$ 实数 $\xrightarrow{\sqrt{-1}}$ 复数 $a+b\sqrt{-1}$→（解析几何）图形

因此，全部数学似乎都可归结为非负整数了，或者说，全部数学都可以归结为算术了。

这样，如果能把算术建立把集合论的基础上，就相当于解决了整个“数学基础”的问题。

法国数学家、数理逻辑先驱弗雷格（G.Frege,1848—1925）就做了这样的工作。他写了一本名叫《算术基础》的书。

2) 弗雷格的《算术基础》

为了使算术建立在集合论的基础上，所有的非负整数，都需要用集合论的观点和语言重新定义。

首先从 0 说起。0 是什么？应当先回答 0 是什么，然后才有表示“0”的符号。

为此，先定义空集。空集是“不含元素的集合”。例如，“方程 $x^2+1=0$ 在实数集中的根的集合”就是一个空集，再例如“由最大的正整数组成的集合”也是一个空集。

所有的空集放在一起，作成一个集合的集合，(为说话简单我们把“集合的集合”称作类)，这个类，就可以给它一个符号：0，中国人念“ling”，英国人念“Zero”。

空集是空的，但由所有空集组成的类，它本身却是一个元素了，即，0是一个元素了。由它再作成一个集合{0}，则不是空集了。

弗雷格再定义两个集合间的双射：既是满射又是单射的映射叫作双射，也称可逆映射；通俗地说，就是存在逆映射的映射。它可以在两个集合间来回地映射，所以一般称为“双射”。

弗雷格再定义两个集合的“等价”：$A \xrightarrow[\text{可逆映射}]{\varphi} B$，能够在其间建立双射的两个集合A、B称为“等价”。

下边可以定义“1”了。把与集合{0}等价的所有集合放在一起，作成一个集合的集合。这个类，就可以给它一个符号：1。

再定义“2”。把与集合{0，1}等价的所有集合放在一起，作成一个集合的集合。这个类，就叫：2。

然后，把与{0，1，2}等价的集合作成的类，叫：3。

一般地，在有了0，1，2，…，n 的定义后，就把所有与集合{0，

1，2，…，n}等价的集合放在一起，作成集合的集合，这样的类，定义为：$n+1$。

这种定义概念的方法，叫作“ 归纳定义 ” 的方法。

这样，弗雷格就从空集出发，而仅仅用到集合及集合等价的概念，把全部非负整数定义出来了。于是根据上边说的“ 可以把全部数学归结为非负整数 ”，就可以说，全部数学可以建立在集合论的基础上了。

3． 罗素的“ 集合论悖论 ” 引发危机

1） 悖论引起震憾和危机

正当弗雷格即将出版他的《算术基础》一书的时候，罗素的集合论悖论出来了。这也是庞加莱宣布“ 完全严格的数学已经建立起来！” 之后刚刚两年，即 1902 年。

集合论中居然有逻辑上的矛盾！

倾刻之间，算术的基础动摇了，整个数学的基础似乎也动摇了。这一动摇所带来的震憾是空前的。许多原先为集合论兴高采烈的数学家发出哀叹：我们的数学就是建立在这样的基础上的吗？

罗素悖论引发的危机，就称为第三次数学危机。

罗素把他发现的悖论写信告诉弗雷格。弗雷格在他的《算术基础》一书的末尾无可奈何地写道："一个科学家遇到的最不愉快的事莫过于，当他的工作完成时，基础崩塌了。当本书即将印刷时，罗素先生的一封信就使我陷入这样的尴尬境地。"

2） 罗素悖论

在叙述罗素悖论之前,我们先注意到下边的事实：一个集合或者是它本身的成员(元素),或者不是它本身的成员(元素)，两者必居其一。罗素把前者称为"异常集合"，把后者称为"正常集合"。

例如,所有抽象概念的集合，本身还是抽象概念。即，它是这一集合本身的元素，所以是"异常集合"。但是，所有人的集合，不是人，即，它不是这一集合本身的元素，所以是"正常集合"。

再例如，所有集合的集合，本身还是集合，即，它是这一集合本身的元素，所以是"异常集合"。但是，所有星星的集合不是星星，即，它不是这一集合本身的元素，所以是"正常集合"。

罗素悖论是：以M表示“是其本身成员的所有集合的集合”（所有异常集合的集合），而以N表示“不是它本身成员的所有集合的集合”(所有正常集合的集合)，于是任一集合或者属于M，或者属于N，两者必居其一，且只居其一。然后问：集合N是否是它本身的成员？（集合N是否是异常集合？）

如果N是它本身的成员，则按M及N的定义，N是M的成员，而不是N的成员，即N不是它本身的成员，这与假设矛盾。即

$$N \in N \Rightarrow N \in M \Rightarrow N \notin N$$

如果N不是它本身的成员，则按M及N的定义，N是N的成员，而不是M的成员，即N是它本身的成员，这又与假矛盾。即

$$N \notin N \Rightarrow N \in N \qquad (N \notin M)$$

悖论在于：无论哪一种情况，都得出矛盾。

罗素悖论的通俗化——“理发师悖论”：某村的一个理发师宣称，他给且只给村里自己不给自己刮脸的人刮脸。问：理发师是否给自己刮脸？

如果他给自己刮脸，他就属于自己给自己刮脸的人，按宣称的原则，理发师不应该给他自己刮脸，这与假设矛盾。如果他不给自己刮脸，他就属于自己不给自己刮脸的人，按宣称的原则，理发师应该给

他自己刮脸，这又与假设矛盾。

4． 危机的消除

危机出现以后，包括罗素本人在内的许多数学家作了巨大的努力来消除悖论。

当时消除悖论的选择有两种，一种是抛弃集合论，再寻找新的理论基础，另一种是分析悖论产生的原因，改造集合论，探讨消除悖论的可能。

人们选择了后一条路，希望在消除悖论的同时，尽量把原有理论中有价值的东西保留下来。

这种选择的理由是，原有的康托集合论虽然简明，但并不是建立在明晰的公理基础之上的，这就留下了解决问题的余地。

罗素等人分析后认为，这些悖论的共同特征（悖论的实质）是“自我指谓”。即，一个待定义的概念，用了包含该概念在内的一些概念来定义，造成恶性循环。

例如，悖论中定义“不属于自身的集合 N ”时，涉及到“自身”这个待定义的对象。

为了消除悖论，数学家们要将康托“朴素的集合论”加以公理化；并且规定构造集合的原则，例如，不允许出现“所有集合的集合”、“一切属于自身的集合”这样的集合。

1908 年，策梅洛（E.F.F.Zermelo,1871—1953）提出了由 7 条公理组成的集合论体系，称为 Z-系统。

1922 年，弗兰克尔（A.A.Fraenkel）又加进一条公理，还把公理用符号逻辑表示出来，形成了集合论的 ZF-系统。再后来，还有改进的 ZFC-系统。

这样，大体完成了由朴素集合论到公理集合论的发展过程，悖论消除了。

但是，新的系统的相容性尚未证明。因此，庞加莱在策梅洛的公理化集合论出来后不久，形象地评论道：“为了防狼，羊群已经用篱笆圈起来了，但却不知道圈内有没有狼”。

这就是说，第三次数学危机的解决，并不是完全令人满意的。

四、 三次数学危机与“无穷”的联系

我们过去就说过，无穷与有穷有本质的区别：

现在我们可以总结说，三次数学危机都与无穷有关，也与人们对

无穷的认识有关。

第一次数学危机的要害是不认识无理数，而无理数是无限不循环小数，它可以看成是无穷个有理数组成的数列的极限。

所以，第一次数学危机的彻底解决，是在危机产生二千年后的 19 世纪，建立了极限理论和实数理论之后。实际上，它差不多是与第二次数学危机同时，才被彻底解决的。

第二次数学危机的要害，是极限理论的逻辑基础不完善，而极限正是有穷过渡到无穷的重要手段。贝克莱的责难，也集中在“ 无穷小量 ” 上。

由于无穷与有穷有本质的区别，所以，极限的严格定义，极限的存在性，无穷级数的收敛性，这样一些理论问题就显得特别重要。

第三次数学危机的要害，是“ 所有不属于自身的集合 ” 这样界定集合的说法有毛病。而且这里可能涉及到无穷多个集合，人们犯了“ 自我指谓 ”、恶性循环的错误。

以上事实告诉我们，由于人们习惯于有穷，习惯于有穷情况下的思维，所以一旦遇到无穷时，要格外地小心；而高等数学则是经常与

无穷打交道的。

[思]：试叙述历史上的三次数学危机中，涉及“有穷与无穷”的具体问题；并谈谈自己的体会。