（七）

第四节　斐波那契数列与黄金分割

一、兔子问题和斐波那契数列

1．　兔子问题

1）　问题 ——取自意大利数学家斐波那契的《算盘书》（1202年）

如果一对兔子每月生一对兔子；一对新生兔，从第二个月起就开始生兔子；假定每对兔子都是一雌一雄，试问一对兔子，一年能繁殖成多少对兔子？

2）　列表解题

① 分析、抓住本质、简化。

题中本质上有两类兔子：一类是能生殖的兔子，简称为大兔子；新生的兔子不能生殖，简称为小兔子；小兔子一个月就长成大兔子。求的是大兔子与小兔子的总和。

② 列表考察兔子的逐月繁殖情况

月份	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
大兔对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
小兔对数	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

到十二月时有大兔子 144 对，小兔子 89 对，共有兔子 144+89=233 对。

3）　深入观察规律

① 每月小兔对数=上月大兔对数。

② 每月大兔对数等于上个月大兔对数与小兔对数之和。

综合①②两点，我们就有：每月大兔对数等于前两个月大兔对数之和。

列表观察，不仅解答了问题，而且找到了规律。

2．　斐波那契数列

1）　公式

用 F_n(n 表示第 n 个月大兔子的对数)，则有

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n = 3,4,5\cdots \end{cases}$$

2）　斐波那契数列

令 n=1,2,3,…　　依次写出数列 $\{F_n\}$，就是

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，…

这就是斐波那契数列。其中的任一个数，都叫斐波那契数。

[思]：　请构造一个 3 阶递推公式。

二、 相关的问题

斐波那契数列是从兔子问题中抽象出来的，如果它在其它方面没有应用，它就不会有强大的生命力。发人深省的是，斐波那契数列确实在许多问题中出现。

1． 跳格游戏

如图，一个人站在“ 梯子格 ”的起点处向上跳，从格外只能进入第 1 格，从格中，每次可向上跳一格或两格，问：可以用多少种方法，跳到第 n 格？

解：设跳到第 n 格的方法有 t_n 种。

由于他跳入第 1 格，只有一种方法；跳入第 2 格，必须先跳入第 1 格，所以也只有一种方法，从而 $t_1 = t_2 = 1$。

而能一次跳入第 n 格的，只有第 $n-1$ 和第 $n-2$ 两格，因此，跳入第 n 格的方法数 t_n ，是跳入第 $n-1$ 格的方法数 t_{n-1}，加上跳入第 $n-2$ 格的方法数 t_{n-2}

$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$，综合得递推公式 $\begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \qquad (n = 3, 4, 5, \cdots) \end{cases}$

容易算出，跳格数列 $\{t_n\}$ 就是斐波那契数列

1，1，2，3，5，8，13，21，34，…

2． 连分数 $x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$

这不是一个普通的分数，而是一个分母上有无穷多个“ 1 ”的繁分数，我们通常称这样的分数为“ 连分数 ”。

上述连分数可以看作是$x=\frac{1}{1+x}$中，把x的表达式反复代入等号右端得到的；例如，第一次代入得到的是$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}$。

这一全部由 1 构成的连分数是最简单的一个连分数。

通常，求连分数的值，如同求无理数的值一样，我们常常需要求它的近似值。

如果把该连分数从第n条分数线截住，即把第$n+1$条分数线上、下的部分都删去，就得到该连分数的第n次近似值，记作$\frac{u_n}{v_n}$。

可算得

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{1}{1},\frac{u_2}{v_2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{1}{2},\frac{u_3}{v_3}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{2}{3},\frac{u_4}{v_4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{3}{5},$$

发现规律后可以改一种方法算$\frac{u_n}{v_n}=\cfrac{1}{1+\cfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}}}$，例如

$$\frac{u_5}{v_5}=\cfrac{1}{1+\cfrac{u_4}{v_4}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}}=\frac{5}{8},\frac{u_6}{v_6}=\cfrac{1}{1+\cfrac{u_5}{v_5}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{8}}=\frac{8}{13},\cdots\cdots$$

顺序排起来，这个连分数的近似值逐次为

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\cdots,\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}},\frac{u_n}{v_n},\cdots$$

可以看出，后一个分数的分子，等于前一个分数的分母；后一个分数的分母，等于前一分数的分子、分母之和，即

$u_n = v_{n-1}, v_n = u_{n-1} + v_{n-1}, n = 2, 3, \cdots$

$$\therefore u_n = v_{n-1} = u_{n-2} + v_{n-2} = u_{n-2} + u_{n-1}$$

与 $u_1 = u_2 = 1$ 合起来，正好有递推公式

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} (n = 3, 4, \cdots) \end{cases}$$

于是分子 u_n 组成的数列 $\{u_n\}$ 正好是斐波那契数列。

同理，可得 $\begin{cases} v_1 = 1, v_2 = 2 \\ v_n = v_{n-1} + v_{n-2} (n = 3, 4, \cdots) \end{cases}$ 知分母组成的数列 $\{v_n\}$ 是缺了第一项的斐波那契数列。

这一点，不难利用性质 $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}}}$ 证明。

3. 黄金矩形

1） 定义：一个矩形，如果从中裁去一个最大的正方形，剩下的矩形的宽与长之比，与原矩形的一样（即剩下的矩形与原矩形相似），则称具有这种宽与长之比的矩形为黄金矩形。黄金矩形可以用上述方法无限地分割下去。

2） 试求黄金矩形的宽与长之比（也称为黄金比）

解：设黄金比为 x，则有 $x = \dfrac{b}{a} = \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{\dfrac{a-b}{a}}{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{1 - \dfrac{b}{a}}{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{1-x}{x}$。将 $x = \dfrac{1-x}{x}$ 变形为 $x^2 + x - 1 = 0$，解得 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$，其正根为 $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$。

3） 与斐波那契数列的联系

为讨论黄金矩形与斐波那契数列的联系，我们把黄金比化为连分数，去求黄金比的近似值。化连分数时，沿用刚才“迭代”的思路：

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}=\frac{1}{\frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1+2}{2}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}=\cdots,$$

反复迭代，得

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

它竟然与我们在上段中研究的连分数一样！因此，黄金比的近似值写成分数表达的数列，也是$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\cdots f_n,\cdots\to\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，其分子、分母都由斐波那契数列构成。并且，这一数列的极限就是黄金比$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

三、 黄金分割

1． 定义：把任一线段分割成两段，使$\frac{\text{大段}}{\text{全段}}=\frac{\text{小段}}{\text{大段}}$，这样的分割叫黄金分割，这样的比值叫黄金比。（留三行空画图）

2． 求黄金比

解：设黄金比为x，不妨设全段长为 1，则大段=x，小段=1－x。

故有$\frac{x}{1}=\frac{1-x}{x}$，$\therefore x^2+x-1=0$

解得$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，其正根为$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.6180339\approx 0.618$。

3．　黄金分割的规尺作图

设线段为AB。作$BD\perp AB$，且$BD=\frac{1}{2}AB$，连AD。作e $D(DB)$交AB？D 于E，再作e $A(AE)$交AB于C，则$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$C$即为$AB$的黄金分割点。

(留 5 行作图)

证：不妨令$|BD|=1$，则$|AB|=2,|AD|=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$，$|AE|=|AD|-|ED|=\sqrt{5}-1$

$|AC|=|AE|=\sqrt{5}-1,\therefore\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。证完

4．黄金分割的美

黄金分割之所以称为“黄金”分割，是比喻这一“分割”如黄金一样珍贵。黄金比，是工艺美术、建筑、摄影等许多艺术门类中审美的因素之一。认为它表现了恰到好处的“合谐”。

1)　人体各部分的比

肚脐；　印堂穴（天目）；　肘关节；　膝盖

（头—脚）　（口—头顶）　（肩—中指尖）　（髋关节—

足尖）

2） 著名建筑物中各部分的比

如埃及的金字塔，高（137 米）与底边长（227 米）之比为 0.629

古希腊的巴特农神殿，塔高与工作厅高之比为 340：553≈0.615

3） 美观矩形的宽长比

如国旗和其它用到矩形的地方（建筑、家具）

4） 风景照片中，地平线位置的安排

天
地

或

天
海、地

5） 正五角星中的比例

$\frac{AB'}{AD}=0.618$， $\frac{AB}{AC}\mathrm{B}\,0.618$

6） 舞台报幕者的最佳站位 在整个舞台宽度的 0.618 处较美

7） 小说、戏剧的高潮 在整个作品的 0.618 处较好

四、 优选法

1． 华罗庚的优选法（“ 0.618 法 ”）

二十世纪六十年代，华罗庚创造了并证明了优选法，还用很大的精力去推广优选法。

“ 优选法 ”，即对某类单因素问题，用最少的试验次数找到“ 最佳点 ” 的方法。

例如，炼钢时要掺入某种化学元素加大钢的强度，掺入多少最合适？假定已经知道每吨钢加入该化学元素的数量大约应在 1000 克到 2000 克之间，现求最佳加入量，误差不得超过 1 克。最“ 笨 ” 的方法是分别加入 1001 克，1002 克，…，做 1 千次试验，就能发现最佳方案。

一种动脑筋的办法是二分法，取 1000 克与 2000 克的中点 1500 克。再取进一步二分法的中点 1250 克与 1750 克，分别做两次试验。如果 1750 克处效果较差，就删去 1750 克到 2000 克的一段，如果 1250 克处效果较差，就删去 1000 克到 1250 克的一段。再在剩下的一段中取中点做试验，比较效果决定下一次的取舍，这种“ 二分法 ” 会不断接近最好点，而且所用的试验次数与上法相比，大大减少。

表面上看来，似乎这就是最好的方法。

但华罗庚证明了，每次取中点的试验方法并不是最好的方法；每

次取试验区间的 0.618 处去做试验的方法，才是最好的，称之为“优选法”或“0.618 法”。

华罗庚证明了，这可以用较少的试验次数，较快地逼近最佳方案。

2. 黄金分割点的再生性和“折纸法”

① 黄金分割点的再生性

（留 2 行作图）

即：如果 C 是 AB 的黄金分割点，C' 是 BA 的黄金分割点，C' 与 C 当然关于中点 0 对称。特殊的是，C' 又恰是 AC 的黄金分割点。同样，如果 C'' 是 CA 的黄金分割点，则 C'' 又恰是 AC' 的黄金分割点，等等，一直延续下去。

② 寻找最优方案的“折纸法”

根据黄金分割点的再生性，我们可以设计一种直观的优选法——“折纸法”。

仍以上边“在钢水中添加某种元素”的问题为例。

用一个有刻度的纸条表达 1000 克——2000 克。在这纸条长度的 0.618 的地方划一条线，在这条线所指示的刻度上做一次试验，也就是按 1618 克做第一次试验。

然后把纸条对折，前一条线落在下一层纸的地方，再划一条线，这条线在 1382 克处，再按 1382 克做第二次试验。

把两次试验结果比较，如果 1618 克的效果较差，我们就把 1618 克以外的短的一段纸条剪去（如果 1382 克的效果较差，就把 1382 克以外的一段纸条剪去）。

再把剩下的纸条对折，纸条上剩下的那条线落在下一层纸的地方，再划一条线，这条线在 1236 克处。

按 1236 克做第三次试验，再和 1382 克的试验效果比较，如果 1236 克的效果较差，我们就把 1236 克以外的短的一段纸条剪去。再对折剩下的纸条，找出第四次试验点是 1472 克。

按 1472 克做试验后，与 1382 克的效果比较，再剪去效果较差点以外的短的一段纸条，再对折寻找下一次试验点，一次比一次接近我们的需要，直到达到我们满意的精确度。

注意，每次剪掉的都是效果较差点以外的短纸条，保留下的是效果较好的部分，而每次留下纸条的长度是上次长度的 0.618 倍。因此，纸条的长度按 0.618 的 k 次方倍逐次减小，以指数函数的速度迅速趋于 0。所以，“ 0.618 法 ” 可以较快地找到满意的点。事实上，当纸条长度已经很小时，纸条上的任一个点都可以作为 “ 满意 ” 的点了，因为最优点就在纸条上，你取的点与最优点的误差一定小于纸条的长。

0.618 这个 “ 黄金比 ” 能产生 “ 优选法 ”，这告诉我们，美的东西与有用的东西之间，常常是有联系的。

3． 最优化数学

生活和生产中提出了大量的优化问题，它们共同的追求目标是：最多、最快、最好、最省。这发展成一门“最优化数学”，包括规化论（线性规划、非线性规划、几何规划、整数规划、动态规划、多目标规则、随机规划等）、统筹学、实验设计（优选法、多因素正交实验法、分批实验法），组合最优化等等。

用导数的方法求极值是用连续的手段处理最优化问题，优选法“0.618 法”则是用离散的手段处理最优化问题。

应当看到，提出和解决最优化问题，是数学应用到实践中去的一条经常的重要的途径。

我们做的“找次品”趣题，也是要最大限度地发挥天平的作用，用最少的次数找出次品来，也是一个最优化问题。

五、数学的统一美

数学中，“从不同的范畴，不同的途径，得到同一个结果”的情形是屡见不鲜的。

这反映了客观世界的多样性和统一性，也反映了数学的统一美。

黄金分割点 0.618 的得到，是一个能说明问题的例子

从不同途径导出黄金比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$

1．　黄金分割：线段的分割点满足$\frac{大段}{全段}=\frac{小段}{大段}$，这一比值正是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

2．　斐波那契数列组成的分数数列$\left\{\frac{F_n}{F_{n+1}}\right\}$　$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\text{L}$ 的极限正是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

3．　方程$x^2+x-1=0$的正根是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

4．　黄金矩形的宽长之比正是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

5．　连分数$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{O}}}}$的值正是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

6．　优选法的试验点，正是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

我们看到了数学的统一美。

六、　斐波那契协会和《斐波那契季刊》

1．　斐波那契协会和《斐波那契季刊》

斐波那契 1202 年在《算盘书》中从兔子问题得到斐波那契数列 1，1，2，3，5，8，13，…之后，并没有进一步探讨此序列，并且在 19 世纪初以前，也没有人认真研究过它。没想到过了几百年之后，十九世纪末和二十世纪，这一问题派生出广泛的应用，从而突然活跃

起来，成为热门的研究课题。

有人比喻说，“ 有关斐波那契数列的论文，甚至比斐波那契的兔子增长得还快 ”，以致 1963 年成立了斐波那契协会，还出版了《斐波那契季刊》。

2． 斐波那契生平

斐波那契（Fibonacci.L,1175—1250）出生于意大利的比萨。他小时候就对算术很有兴趣。后来，他父亲带他旅行到埃及、叙利亚、希腊（拜占庭）、西西里和普罗旺斯，他又接触到东方国家的数学。斐波那契确信印度—阿拉伯计算方法在实用上的优越性。1202 年，在回到家里不久，他发表了著名的《算盘书》。

斐波那契的才能受到弗里德里希二世的重视，因而被邀请到宫廷参加数学竞赛。他还曾向官吏和市民讲授计算方法。

他的最重要的成果在不定分析和数论方面，除了《算盘书》外，保存下来的还有《实用几何》等四部著作。

3． 自然界中的斐波那契数

斐波那契数列中的任一个数，都叫斐波那契数。斐波那契数是大自然的一个基本模式，它出现在许多场合。下面举几个例子。

1） 花瓣数中的斐波那契数

大多数植物的花，其花瓣数都恰是斐波那契数。例如，兰花、茉

利花、百合花有 3 个花瓣，毛茛属的植物有 5 个花瓣，翠雀属植物有 8 个花瓣，万寿菊属植物有 13 个花瓣，紫菀属植物有 21 个花瓣，雏菊属植物有 34、55 或 89 个花瓣。

2）向日葵花盘内葵花子排列的螺线数

（右边空出位置，贴图）

向日葵花盘内，种子是按对数螺线排列的，有顺时针转和逆时针转的两组对数螺线。两组螺线的条数往往成相继的两个斐波那契数，一般是 34 和 55，大向日葵是 89 和 144，还曾发现过一个更大的向日葵有 144 和 233 条螺线，它们都是相继的两个斐波那契数。

这一模式几个世纪前已被注意到，此后曾被广泛研究，但真正满意的解释直到 1993 年才给出。这种解释是：这是植物生长的动力学特性造成的；相邻器官原基之间的夹角是黄金角——137.50776 度；这使种子的堆集效率达到最高。

4． 科学中的斐波那契数列

1） 电路中的斐波那契数列

如右图那样专门设计的电路，表示的都是 1 欧姆的电阻，最后一个分支中的电流为 1 安培，则加在电阻上的电压（从右至左）恰好是斐波那契数列：1，1，2，3，5，8，13，…

2） 通过面对面的玻璃板的斜光线的不同路线条数

反射次数为 0 的光线以唯一的一种路线通过玻璃板；

反射次数为 1 的光线可以以 2 种路线通过玻璃板；

反射次数为 2 的光线可以以 3 种路线通过玻璃板；

反射次数为 3 的光线可以以 5 种路线通过玻璃板；

M

反射次数为 n 的光线可以以 F_{n+2} 种路线通过玻璃板；

3） 股票指数增减的“ 波浪理论 ”

① 完整周期 3 上 2 下（或 5 上 3 下或 3 上 5 下），常是相继两斐波那契数；

② 每次股指增长幅度（8，13 等）或回调幅度（8，5），常是相继两斐波那契数。

股指变化有无规律？回答是肯定的。

1934 年美国经济学家艾略特在通过大量资料分析、研究后，发现了股指增减的微妙规律，并提出了颇有影响的“ 波浪理论 ”。该理论认为：股指波动的一个完整过程（周期）是由波形图（股指变化的图象）上的 5（或 8）个波组成，其中 3 上 2 下（或 5 上 3 下），如图，无论从小波还是从大波波形上看，均如此。

注意这儿的 2、3、5、8 均系斐波那契数列中的数。

同时，每次股指的增长幅度常循斐波那契数列中数字规律完成。比如：如果某日股指上升 8 点，则股指下一次攀升点数为 13；若股指回调，其幅度应在 5 点左右。显然，5、8、13 为斐氏数列的相邻三项。

可以说，斐波那契以他的兔子问题，猜中了大自然的奥秘，而斐波那契数列的种种应用，是这个奥秘的不同体现。妙哉数学！

5. 推广的斐波那契数列——卢卡斯数列

1) 卢卡斯数列

卢卡斯（Lucas，F.E.A. 1824：1891）构造了一类更值得研究的数列，现被称为“ 推广的斐波那契数列 ”，即

从任何两个正整数开始，往后的每一个数是其前两个数之和，由此构成无穷数列。此即，二阶递推公式$\begin{cases} L_1 = ? \quad L_2 = ? \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \end{cases}$中，递推式与前面一样，而起始整数$L_1, L_2$可任取。

斐波那契数列 1，1，2，3，5，8，… 是这类数列中最简单的一个，起始整数L_1, L_2分别取为 1、1。

次简单的为 1，3，4，7，11，18，… 现称之为之卢卡斯数列。

卢卡斯数列的通项公式是$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

推广的斐波那契数列与斐波那契数列一样，与黄金分割有密切的联系：该数列相邻两数之比，交替地大于或小于黄金比；并且，两数之比的差随项数的增加而越来越小，趋近于0，从而这个比存在极限；而且这个比的极限也是黄金比$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

2） 用斐波那契数列及其推广变魔术

① 让观众从你写出的斐波那契数列中任意选定连续的十个数，你能很快说出这些数的和。

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，------

其实有公式：这个和，就是所选出的十个数中第七个数的11倍。

② 让观众从你写出推广的斐波那契数列中任何地方划一条线，你能迅速说出“这条线之前所有各数”的和。

其实有公式：前n项和=$\mathring{F}_{n+2} - \mathring{F}_2 \mathring{F}_n$ （？加逗号）表示卢卡斯数列的第n项。

6． 斐波那契数列的一些更深刻的性质

1） 通项公式 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right)^n\right]$

一个正整数序列的通项，竟然可以用带有无理数 $\sqrt{5}$ 的式子表达，这是十分意外的结果。

该证明由法国数学家比内（Binet）做出。

[南开大学数学学院学生吴云辉、李明昱曾经在“ 数学文化 ”课的读书报告中，给出了这一通项公式的多个证明]

2） 斐波那契数列的后项除以前项做成的分数数列 $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\mathrm{L}$ 的极限为黄金比的倒数

$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$，称为第二黄金比。

即有 $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \mathrm{L} \approx 1.618$

[思] 请构造一个 3 阶递推公式。

答： 例如 $\begin{cases} F_1 = F_2 = F_3 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} \end{cases}$