

## (十六)

### 从吴文俊和吴方法谈起

#### - 数学机械化的观点

本次课主要讲解在数学发展中起着重要作用的机械化思想,并对解代数方程组的机械化方法—吴方法的原理和应用作了介绍,希望学生能通过这次课初步了解数学机械化思想。

#### 一、吴文俊院士介绍

吴文俊,数学家。中国科学院数学与系统科学研究院研究员,系统科学研究所名誉所长,中国科学院院士,第三世界科学院院士;曾任中国数学会理事长(1984-1987),中国科学院数学学部主任(1992-1994),全国政协委员、常委(1979--1998)。1919年出生于上海。1940年上海交通大学毕业后任中学教员,直至抗战胜利。1946年被陈省身先生吸收到中央研究院数学所,从事拓扑学研究。1947年赴法留学,师从著名数学家埃里斯曼与嘉当,继续从事拓扑学研究,1949年获法国国家博士学位。1951年回国,在北京大学任教授。1952年任中国科学院数学所研究员1980年任中国科学院系统所研究员。

吴文俊对数学的主要领域——拓扑学做出了奠基性的贡献。70年代后期开创了崭新的数学机械化领域。此外,在中国数学史、代数几何学、对策论等领域也有独创性成果。这些成果不仅对数学研究影响深远,还在许多高科技领域得到应用。他的卓越贡献,得到科技界的高度评价。1956年,获得首届国家自然科学奖一等奖;1993年获陈嘉庚数理科学奖;1994年获首届求是科技基金会杰出科学家奖;1997年获自动推理的最高奖Herbrand奖;2001年获得首届国家最高科技奖;2006年获邵逸夫数学奖。

邵逸夫数学科学奖是一项国际性大奖,它的评委是来自国际数学界的知名权威。吴文俊说:这次邵逸夫奖的评委都是国际上有影响的大家,他们宣布我获得邵逸夫奖,是因为我的数学机械化问题的研究,这实际上是国际数学界对数学机械化研究的承认与肯定,它比奖金重要得多。

#### 中央电视台《大家》栏目:《吴文俊·我的不等式》片断

[解说]:吴文俊在37岁时,在“现代数学女王”拓扑学方面取得重大成就,享誉国际。但二十年后,他却放弃了已经硕果累累的拓扑学,涉足中国古代数学,进而开创了国际数学界的全新的研究方向---数学机械化。这是近代数学史上的第一个中国原创的领域,被国际上称为“吴方法”。

“吴方法”根植于中国古代数学的思想精髓,但在1975年前,吴文俊还认为中国古代数学都是些不值得考虑的东西。

吴文俊:我对中国的古代数学不感兴趣,我所知道的都是从外国的书上看到的,中国的古代数学都是些加减乘除,乱七八糟无聊的东西,不值得考虑,所以我从来不看。那么转变

是在1975年的事,那时候是在文化大革命,有时候非常紧张,有时候比较松动,也可以看看数学了。但是那个时候你要真正搞拓扑还是有麻烦、有许多阻力的。还是有点,你走资产阶级学术道路,反正有这个压力了。系统科学所所长关肇直就出了个主意,那个时候不是老是提倡有一点复古倾向,提出来一起学习中国的古代数学。这个有道理,一方面是合法,是符合上面的要求的,一方面你可以堂而皇之地大家学。

这个情势之下,我倒觉得好奇了,我自己有一些书,我喜欢买书,不一定看,这些书在文化大革命都清掉了,我就问他借,借了书,然后再跑图书馆,我看懂了。总的一句话,中国这个数学的道路跟西方欧几里得的传统公理化的数学道路是不一样,中国的数学是另外一套,中国没有什么公理,没有什么公理系统,根本不考虑定理。中国主要是解决问题,这是我的分析了。开头也是不懂,因为它的古文的文字我就看不懂,我先看通俗的,然后再看原文,因为古文的专门名字跟现在是完全大不相同了。就这样慢慢一点一点弄懂。所以中国的古代数学,为了要解决形形色色的问题,自然而然引到解方程。那么中国的解方程它是这样子的,是一步一步地做,第二步怎么样,第三步怎么样,要用现代的语言来讲就是程序。根据算法用现在的话,你就可以变成程序,输到机器里面,让他一步一步去做,最后给他要求的解答,这是中国的数学。

主持人:这个时候,您对中国数学的看法已经不是过去那种认为中国没有什么数学了?

吴文俊:对,对中国的古代数学我理解,懂了,我觉得我懂了,我说古代数学是符合现在计算机时代的数学。

[解说]:在吴文俊眼里,中国古代数学就是一部算法大全,有着世界最早的几何学、最早的方程组、最古老的矩阵。中国古代数学的价值已被世界淡忘,但吴文俊却洞察出,其中包含着的独特的机械化思想,它能够把几何问题转化为代数,再编成程序,输进电脑后,代替大量复杂的人工演算,这样就可以就把数学家从繁重的脑力劳动中解放出来,进而推进科学发展。这就是机器证明,后来吴文俊把它冠名为“数学机械化”。直到现在,87岁高龄的吴文俊仍在继续引领这一学科的发展。

什么是数学机械化呢?所谓机械化,无非是刻板化和规格化。数学问题的机械化就要求在运算或证明过程中,每前进一步之后,都有一个确定的、必须选择的下一步,这样沿着一条有规律的、刻板的道路,一直达到结论。

使用一种机械化方法证明一类定理,才真正体现了机械化定理证明。1977年,吴文俊给出了初等几何一类主要定理的机械化证明方法-“吴方法”。

## 二、数学机械化—从设想到实现

下面我们从笛卡尔、莱布尼兹、希尔伯特、哥德尔、塔斯基、王浩、吴文俊等数学家的思想和工作来看一下数学机械化从设想到实现的简要历史。

### 1. Descartes的设想

17世纪法国的数学家 Descartes 曾有过一个伟大的设想:“一切问题化为数

学问题，一切数学问题化为代数问题，一切代数问题化为代数方程求解问题。”

Descartes 把问题想得太简单了，如果他的设想真能实现，那就不仅是数学的机械化，而是全部科学的机械化。因为代数方程求解是可以机械化的。

但 Descartes 没有停留在空想，他所创立的解析几何，在空间形式和数量关系之间架起了一座桥梁，实现了初等几何问题的代数化。

## 2 . Leibniz之梦

德国数学家 Leibniz 曾有过“推理机器”的设想。他研究过逻辑，设计并制造出能做乘法的计算机，进而萌发了设计万能语言和造一台通用机器的构想。

他的努力促进了 Boole 代数、数理逻辑以及计算机科学的研究，正是沿着这一方向，经后人的努力，形成了机器定理证明的逻辑方法。

## 3 . Hilbert的《几何基础》

Hilbert在《几何基础》中提出了从公理化走向机械化的数学构想。Hilbert计划将数学知识纳入严格的公理体系中，并着力在公理化基础上寻找机械化的方法判定命题是否成立。Hilbert同时指出，定理的判定问题应当是分类解决的，解决方法要同时强调简单性和严格性。

在 Hilbert 的名著《几何基础》一书中就提供了一条可以对一类几何命题进行判定的定理——当然，在那个时代，不仅 Hilbert 本人，整个数学界都没有意识到这一点。

## 4 . Gödel著名的不完全性定理

Gödel著名的不完全性定理指出一个不弱于初等数论的形式系统如果是无矛盾的，则是不完全的，即存在形式系统的一个命题，它和它的否定都不能由形式系统证明。

因此，Hilbert 的要求太高了。上述的Gödel不完全性定理断言：即使在初等数论的范围内，对所有命题进行判定的机械化方法也是不存在的！

## 5. Tarski的定理

波兰数学家 Tarski 在 1950 年推广了关于代数方程实根数目的 Sturm 法则，由此证明了一个引人注目的定理：“一切初等几何和初等代数范围的命题，都可以用机械方法判定。”

Tarski得出的结论给定理证明机械化的研究带来了曙光。可惜他的方法太复杂，即使用高速计算机也证明不了稍难的几何定理。

## 6 . 王浩的定理机器证明程序

1959年，王浩设计了一个程序，用计算机证明了 Russell、Whitehead 的巨著《数学原理》中的几百条有关命题逻辑的定理，仅用了 9 分钟。王浩工作的意义在于宣告了用计算机进行定理证明的可能性。

在1960年的《IBM研究与发展年报》(IBM Journal)，王浩发表了《迈向数学机械化》(Toward Mechanical Mathematics)，“数学机械化”一词即出自此处。

## 7. 吴方法的产生

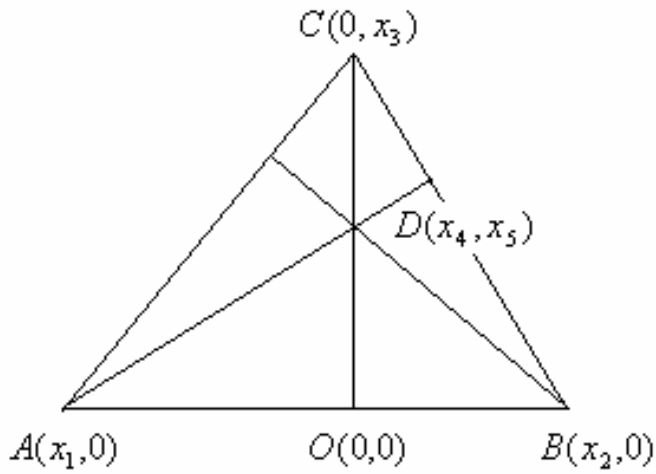
1977年，吴文俊在《中国科学》上发表论文《初等几何判定问题与机械化问题》。1984年，吴文俊的学术专著《几何定理机器证明的基本原理》由科学出版社出版，这部专著着重阐明几何定理机械化证明的基本原理。1985年，吴文俊的论文《关于代数方程组的零点》发表，具体讨论了多项式方程组所确定的零点集。与国际上流行的代数理想论不同，明确提出了具有中国自己特色的、以多项式零点集为基本点的机械化方法。自此，“吴方法”宣告诞生，数学机械化研究揭开了新的一幕。

### 《吴文俊·我的不等式》片断

他就责问我，他说外国搞机器证明，他现在说明机器证明承认了，他提出来外国搞机器证明，都是用数理逻辑的，你怎么不用数理逻辑？我就冒火了，我当场和他吵了起来，我很少和人吵架的，这次我发火了。你说外国人搞数理逻辑，我就非得要数理逻辑吗？外国人搞的我就不搞，外国人不搞了我就搞，这是我的基本原则。你不能跟着外国人的屁股走。我觉得将来的数学要走中国古代数学的道路而不是西方欧几里得的道路，这是我总的见解。过去体力劳动机械化，我们没有份，结果我们一落千丈了，处处挨打了。现在脑力劳动机械化，你不能错过这个机会，错失这个机会，那你永世不能翻身了，这是我一直坚决强调的，所以我对我的数学机械化是寄予厚望了。

## 三. 吴方法概要

### 1. 三角形三条高线交于一点的代数证明



其中D是BC和CA上高线交点。

定理的假设部分是  $AD \perp BC \Leftrightarrow x_3x_5 - x_2(x_4 - x_1) = 0$  ,

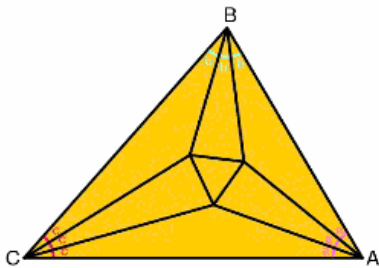
$BD \perp AC \Leftrightarrow x_3x_5 - x_1(x_4 - x_2) = 0$ .

由吴方法, 可得非退化条件是  $x_3(x_1 - x_2) \neq 0$ .

定理的结论是CO经过D点, 即  $x_4 = 0$ .

显然在非退化条件下定理成立。

2. Morley定理是说任意三角形中, 一个角的三等分线, 与和它相邻的角的三等分线相交, 交点组成正三角形 (参见下图)。



这个定理可以推广为任意三角形中, 一个角的三等分线, 与和它相邻的角的三等分线相交,

按一定的规则选取交点,共可组成27个三角形,在这27个三角形中,一定有18个是正三角形。

用机器方法容易证明这个更一般的Morley定理。在证明过程中,多次出现关于12个变量的含有一千多项的多项式。

3. 吴方法概要如下:

- 定理的假设相当于一组多项式方程 $F_1=0, \dots, F_s=0$
- 定理的结论相当于一个多项式方程 $G=0$
- 上面的诸 $F_i$ 称为假设多项式, $G$ 称为终结多项式。

吴方法是给出了一个机械化方法,在有限步内给出一组非退化条件多项式 $D_1, \dots, D_r$ 又根据这一机械化方法足以在有限步内,判定在非退化条件

$$D_1 = 0, \dots, D_r = 0$$

下, $G=0$ 是否可从 $F_1=0, \dots, F_s=0$ 推出。

吴方法遵循中国传统数学中几何代数化的思想,与通常基于数理逻辑的方法根本不同,首次实现了高效的几何定理自动证明,显现了无比的优越性。他的工作被称为自动推理领域的先驱性工作,并于1997年获得“Herbrand自动推理杰出成就奖”。在颁奖辞中对他的工作给了这样的介绍与评价:

“几何定理自动证明首先由赫伯特·格兰特(Herbert Gerlenter)于50年代开始研究。虽然得到一些有意义的结果,但在吴方法出现之前的20年里,这一领域进展甚微。在不多的自动推理领域中,这种被动局面是由一个人完全扭转的。吴文俊很明显是这样一个人。他将几何定理证明从一个不太成功的领域变为最成功的领域之一。”

四. 机械化思想是贯穿于中国古代数学的精髓

70年代初,吴文俊开始研读中国数学史。1975年,他撰写了《中国古代数学对世界文化的伟大贡献》,文中详细列举在代数、几何、三角、解析几何和微积分等学科的和创立过程中,中国传统数学所起的重大作用。

吴文俊指出,中国传统数学注意解方程,在代数学、几何学、极限概念等方面既有丰硕的成果,又有系统的理论。

中国传统数学强调构造性和算法化,注意解决科学实验和生产实践中提出的各类问题,往往把所得到的结论以各种原理的形式予以表述。

中国传统数学在从问题出发以解决问题为主旨的发展过程中建立了以构造性与机械化为其特色的算法体系,《九章算术》与刘徽的《九章算术注》是这一机械化体系的代表作,这与西方数学以欧几里得《几何原本》为代表的所谓公理化演绎体系正好遥遥相对。

吴文俊把中国传统数学的思想概括为机械化思想,指出它是贯穿于中国古代数学的精

髓。他列举大量事实说明，中国传统数学的机械化思想为近代数学的建立和发展做出了不可磨灭的贡献。

这种机械化思想，不仅曾深刻影响了数学的历史进程，而且对数学的现状也正在发扬它日益显著的影响。

吴方法的核心在于给出了解代数方程组的机械化方法，定理机器证明只是这个方法的一个应用。

## 五．数学机械化方法的应用

吴文俊特别重视数学机械化方法的应用，明确提出“数学机械化方法的成功应用，是数学机械化研究的生命线”。他不断开拓新的应用领域，如控制论、曲面拼接问题、机构设计、化学平衡问题、平面天体运行的中心构形等，还建立了解决全局优化问题的新方法。

吴方法还被用于若干高科技领域，得到一系列国际领先的成果，包括曲面造型、机器人结构的位置分析、智能计算机辅助设计(CAD)、信息传输中的图像压缩等。

下面我们看一些应用的案例：

### 1．从开普勒定律到牛顿定律

开普勒定律为

(1) 行星绕太阳以椭圆轨道运行，太阳为一焦点

(2) 太阳到行星的向量在相同的时间扫过相同的面积

牛顿定律为

### (3) 行星的加速度与太阳到行星的距离的平方成反比

利用吴方法在微分域上的推广，可以从开普勒经验公式自动推导出牛顿定律。

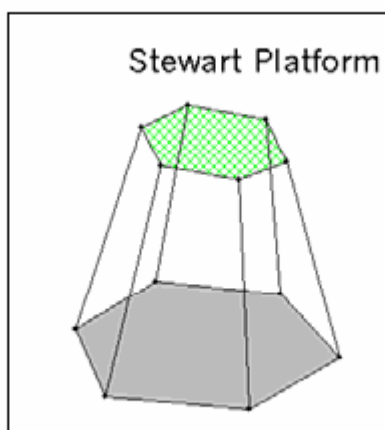
## 2. 微分几何的定理机器证明

微分几何离不开函数和微分，从表面上看似乎不能使用计算机进行证明，但事实上并非如此。在微分几何中出现的那种函数与导数完全可以形式地来对待，因此，存在着通过有限次的构造步骤借助于计算机来进行微分几何定理证明的可能性。

微分多项式组的整序算法已经应用于微分几何的一些定理的机器证明与一些几何关系或公式的自动发现和推导。

## 3. 机器人与连杆机构的运动分析

如下图，绿色的平台是活动平台，下面的平台是固定的，六根连杆长度可变，求连杆长度变化时平台上一点的轨迹。



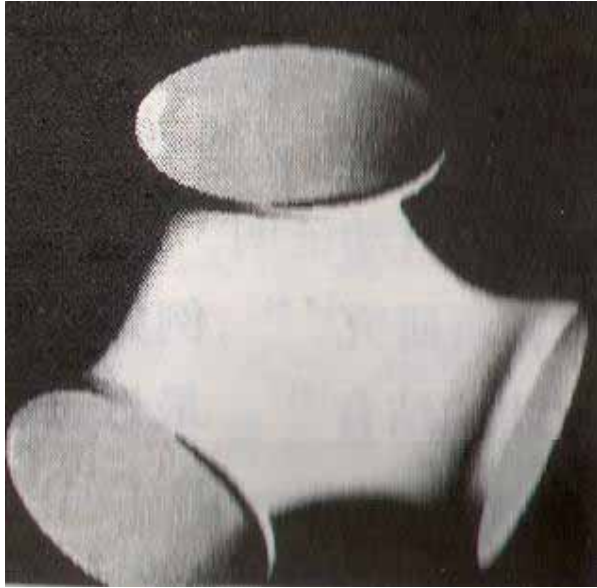
已知连杆机构的构成，求该机构上某一点的轨迹及该点的位置与连杆机构的关系，这类问题称为机械设计中的正解问题。前面的例子就是一个正解问题。

反过来，求解连杆机构的参数使得连杆机构上一点恰好位于空间指定位置的问题称为机械设计中的逆解问题。

这两类问题都可以看成方程求解问题。

吴文俊用特征集方法解决了一般PUMA型机器人的逆解问题，研究了四连杆的设计问题。

## 4. 曲面连接问题



上图是一个连接三根管道的例子。

在几何设计中,有一大类问题要确定一给定次数的代数曲面按一定要求连接已给的若干代数曲面。

这类问题可以用吴方法解决。

## 5. 杨-Baxter方程与量子群

应用吴方法,采用人机对话的方式,运用多种技巧,成功地求出二维杨-Baxter方程的全部解。在二维情形下,这组方程有16个未知数,由64个三次多项式方程组成。

相应于杨-Baxter方程的解,可得到量子群。但具体计算对应的量子群并不容易。从吴方法出发,可给出依据杨-Baxter方程的解直接计算相应量子群的机械化方法。

## 六．数学机械化思想的意义

在新的正在到来的工业革命中，可以认为是以某种设备代替人脑。这将使人类艰苦思考的价值为之降低，是一种脑力劳动的机械化。这种机械化由于上世纪中叶计算机的发明而有某种可能。

数学是一种典型的脑力劳动。由于数学思维具有其它思维方式所没有的简洁、明确、严密、清晰等优点，因而数学的机械化比之其它思维的机械化，应有它的优越性与优先性，而且应更为容易。吴方法在几何定理证明方面机械化的成功，正好说明是如此。

线性方程组求解中的消去法是机械化思想的杰作。即使是现代纯粹数学研究中，机械化思想也一直发挥重大的作用。例如，希尔伯特倡导的数理逻辑为计算机的设计原理作了准备。H. Cartan关于代数拓扑学同调群计算的工作可以看作是机械化思想的成功范例。

运用机械化思想考察数学，将会发现数学的不同侧面，建立新的模式，活跃和启迪数学家的思维，从而产生大量的原始创新。

机械化可以使得大量繁复的事情交给计算机去做，而数学家将从事富有创造性的劳动。

1981年吴文俊在《数学的机械化与机械化的数学》一文中指出：“我们的研究工作还只是一个开端。如何继续发扬中国古代传统数学的机械特色，对数学各个不同领域探索实现机械化的数学，则是本世纪以致可能绵亘整个21世纪才能大体趋于完善的事。”

近20多年来，在吴文俊的积极倡导下，中国的数学机械化研究已初现丰富多彩之势。展望21世纪，我们有理由相信，机械化数学和数学机械化必将为数学以致整个科学注入新的活力。

### 参考文献

[1] 《吴文俊论数学机械化》，山东教育出版社，1996.

[2] 高小山，吴文俊对机械化数学的贡献，《数学与数学机械化》，pp.16-48，山东教育出版社，2001.